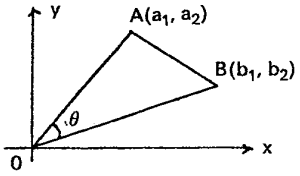
单元 A4：不等式

特定目标：

1. 学习不等式的基本性质。
2. 证明简单絕对不等式。
3. 解简单条件不等式。

内容	时间分配	教学建议
22		
4.1 絕对不等式	6	学生应能正确地运用符号 $a > b$ 及 $a \geq b$。教师应和学生温习不等式的基本性质，其中应包括 (i) 对一任意实数 x，$x^2 \geq 0$ (ii) 若 $a > b > 0$ 及 n 为一正整数，则 $a^n > b^n$ 及 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ (iii) 若 $a > b > 0$ 及 $x > y > 0$，则 $ax > by$； 惟无须涉及这些基本性质之严谨证明。学生应能从这些基本性质推算出简单的絕对不等式。处理絕对不等式的证明，教师可强调以下的技巧： *例*： 证明 $E_1 \geq E_2$ 证：$E_1 - E_2 = ...$ $= .....$ $= .....$ ≥ 0 $\therefore E_1 \geq E_2$
4.2 A.M. ≥ G.M.	4	作为 A.M. ≥ G.M. 的初步认识，教师可提供最多至四个变量的证明，而不强调此定理的一般性证明。若有需要，教师可用反向归纳法去证明此定理。学生须要懂得如何运用此结果至 n 个变量。
4.3 柯西——许瓦尔兹不等式	3	学生应理解二次式 ax^2+bx+c 恒为正数的充要条件为 $a>0$ 及 $b^2-4ac<0$，并应能利用此结果去解如「若 $cx^2+4x+c+3$ 恒为正数，其中 x 为实数，求 c 之范围。」的问题。柯西——许瓦尔兹不等式可从上述结果证明。

内容	时间分配	教学建议
23		
		n = 2 的柯西——许瓦尔兹不等式的几何意义可从坐标平面得出。 $\cos\theta = \dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}$ $= \dfrac{(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-\left[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\right]}{2\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$ $= \dfrac{(a_1b_1+a_2b_2)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$ $\cos^2\theta = \dfrac{(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}$  因为 $\cos^2\theta \leq 1$， $\therefore (a_1b_1+a_2b_2)^2 \leq (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$ 学生应能应用此不等式去解有关的简单问题。
4.4 条件不等式	7	学生宜温习实在线的区间概念。实数的絕对值的定义及性质应予讨论。学生应能解线性不等式、一元二次不等式及一元高次不等式。教师应和学生讨论含有絕对值的不等式解法，例如 $\lvert ax^2+bx+c\rvert \geq d$，$\lvert x-a\rvert+\lvert x-b\rvert \geq c$ 及 $(x-a)\lvert x-b\rvert \geq c$。教师亦应对如 $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ 形式的不等式加以讨论，其中 P(x)及 Q(x)均为多项式。上述不等式的复合不等式亦应给予指导。
	20	

表示删去的内容